PELABELAN TOTAL SISI AJAIB GRAF HASIL KALI KARTESIUS

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

YULIANA
10754000263

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

PELABELAN TOTAL SISI AJAIB GRAF HASIL KALI KARTESIUS

YULIANA
NIM : 10754000263

Tanggal Sidang : 30 Desember 2011
Periode Wisuda : Februari 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Pelabelan total sisi ajaib pada graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ adalah suatu pemetaan bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, .., |V(G) \cup E(G)|\}$ yang mempunyai sifat bahwa setiap sisi (x, y) di G berlaku $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$. Selanjutnya k disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut pelabelan total sisi ajaib. Pada tugas akhir ini membahas pelabelan total sisi ajaib pada hasil kali dua graf dan dualitas pelabelannya, yaitu $G_1 \times G_2$ untuk suatu G_1 dan G_2 yang diberikan. G_1 suatu lintasan dengan jumlah titik ganjil dan G_2 lintasan dengan dua titik. Hasil kali kartesius $P_3 \times P_2$ mempunyai konstanta ajaib $k = 17$, graf hasil kali kartesius $P_5 \times P_2$ mempunyai konstanta ajaib $k = 28$, graf hasil kali kartesius $P_7 \times P_2$ mempunyai konstanta ajaib $k = 39$.

Kata Kunci : Graf hasil kali kartesius, konstanta ajaib, pelabelan total sisi ajaib.

KATA PENGANTAR

Dengan menyebut asma Allah Yang Maha Pengasih lagi Penyanyang.

Segala puji bagi Allah, Tuhan yang telah menitahkan ilmu sebagai sifat tertinggi diantara sifat-sifat yang sempurna. Aku bersaksi, sesungguhnya tiada Tuhan selain Allah Yang Maha Tunggal dan tiada sekutu bagi-Nya, yang mengkhususkan hamba-Nya yang dikehendaki-Nya dengan berbagai kelebihan hikmah. Aku bersaksi, sesungguhnya Muhammad itu hamba dan Rasul-Nya yang diistimewakan dengan segala macam kesempurnaan sebagai hamba. Semoga Allah berkenan melimpahkan rahmat-Nya kepada Nabi Muhammad SAW. Seorang Rasul yang jiwanya telah dipenuhi keagungan Allah yang tertinggi, sehingga beliau menjadi hamba yang yang penuh bahagia dan pertolongan, semoga Allah melimpahkan rahmat-Nya pula kepada keluarga sahabatnya serta orang-orang yang berbuat pada lintasan jalan-Nya sehingga mereka memperoleh kebaikan sempurna.

Skripsi ini adalah sebuah karya tulis sederhana yang penulis persiapkan sebagai salah satu bentuk implementasi insan akademis di lingkungan UIN SUSKA RIAU. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan suatu hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, saran, serta do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Kedua orang tua yang telah memberikan kasih sayang, semangat serta dukungan secara moral dan materil selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan, dan Pembantu Dekan beserta karyawan/ti Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

5. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku pembimbing yang telah banyak meluangkan waktunya untuk membimbing penulis, memberikan nasehat-nasehat serta saran-saran yang membuat penulis bersemangat hingga skripsi ini mampu diselesaikan tepat pada waktunya.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Koordinator Tugas Akhir.
7. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan FST UIN SUSKA Riau, khususnya di Jurusan Matematika yang telah banyak membantu penulis dalam berbagai hal.
8. Segenap mahasiswa jurusan Matematika khususnya angkatan 2007 Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
9. Teman-teman, adik-adik serta kakak-kakak di Pondokan Rossa, kalian adalah teman sekaligus keluargaku yang telah memberikan warna dalam kehidupan perkuliahan.
10. Semua pihak yang telah memberikan bantuannya dari awal sampai selesai tugas akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang bersifat membangun dari para pembaca sangat penulis harapkan. Akhir kata semoga Allah Yang Maha Penyayang membalas kebaikan mereka. Semoga karya tulis ini bermanfaat, terutama kaum muslimin dan dijadikan tabungan amal sampai hari pembalasan nanti. Amin..

Pekanbaru, 30 Desember 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736, ketika dia mendiskusikan mungkin atau tidaknya melintasi jembatan yang ada di kota Kaliningrad-Rusia hanya dengan melewatinya satu kali saja. Solusi yang diusulkannya atas permasalahan tersebut kemudian dikenal dengan teori graf. Sejak saat itu, topik dari graf ini mulai dipelajari oleh para ahli matematika (Cunningham, 2004). Graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diintepretasikan secara tepat. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti (Siang, 2006).

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edge* atau *arch*) yang menghubungkan sepasang simpul (Munir, 2005). Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan dalam teori graf adalah pemberian nilai pada titik, sisi, atau titik dan sisi. Salah satu cara yang digunakan adalah melabelkan dengan bilangan pada titik, sisi atau titik dan sisi.

Pelabelan graf sudah banyak dikaji mulai tahun 60-an, yaitu pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Studi dari pemberian label pada graf telah menfokuskan pada penemuan graf-graf tertentu yang memiliki pelabelan tertentu sehingga banyak jenis-jenis pelabelan, diantaranya adalah pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan ajaib. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, pelabelan ajaib (*magic labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif f dari himpunan sisi E ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda, sehingga untuk setiap titik $v \in V$, penjumlahan semua label sisi *e* yang *incident* terhadap titik v adalah sama.

Pelabelan ajaib dalam pengembangannya dikenal pula pelabelan total titik ajaib, pelabelan total sisi ajaib, pelabelan total titik anti ajaib dan pelabelan total sisi anti ajaib. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Salah satu pelabelan ajaib yang digunakan yaitu pada pelabelan titik ajaib yang penulis temukan dalam jurnal yang dikembangkan oleh Daysi Cunningham yang berjudul "*Vertex Magic*" telah di publikasikan di *Furman University*, volume 9, 1-20 2004. Pelabelan titik dapat diterapkan pada graf siklik yang mempunyai vertek genap maupun vertek ganjil, selain itu juga dapat diterapkan dalam graf lengkap. Ada beberapa macam graf yang telah ditemukan, salah satunya graf hasil kali kartesius, yaitu graf yang diperoleh dari perkalian dua buah graf.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik membahas tentang pelabelan total sisi ajaib pada salah satu sub kelas graf sederhana yaitu dengan judul **"Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Hasil Kali Kartesius''.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah:

a. Bagaimana memberikan pelabelan total sisi ajaib pada graf hasil kali kartesius.
b. Bagaimana memberikan label dual pada graf hasil kali kartesisus.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada pengerjaan tugas akhir ini hanya melakukan pelabelan total sisi ajaib graf hasil kali kartesius pada graf sederhana, terbatas dan tidak berarah yaitu graf lintasan $P_m \times P_2$ dengan m ganjil, khususnya $m = 3, 5, 7$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menunjukkan graf hasil kali kartesius dari graf lintasan $P_m \times P_2$ dengan m ganjil merupakan pelabelan total sisi ajaib.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulis berharap hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan tambahan dalam pengembangan ilmu matematika, selain itu bermanfaat untuk:

1. Bagi penulis, sebagai sarana dan latihan untuk menambah pemahaman dan penguasaan tentang materi yang diambil dalam penulisan ini.
2. Bagi pembaca, sebagai bahan kajian bagi yang sedang menempuh mata kuliah yang berhubungan dengan materi ini.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penulisan tugas akhir ini terdiri dari lima bab yaitu sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan definisi teori graf, terminologi graf, graf hasil kali kartesius, pelabelan total sisi ajaib, batas konstanta ajaib.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan metode yang penulis gunakan dalam penyelesaian tugas akhir serta berisikan langkah-langkah dalam tugas akhir ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara secara teoritis dalam mendapatkan hasil penilitian.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan dan saran untuk pembaca.

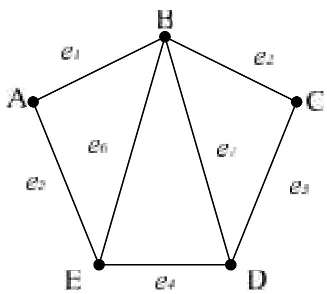
BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini menyajikan beberapa materi pendukung yang akan digunakan sebagai landasan teori dalam membahas tugas akhir yang berjudul **’’Pelabelan Total Sisi Ajaib Graf Hasil Kali Kartesius”.**

2.1 Graf

Definisi 2.1 (Siang, 2006) Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan titik-titik tidak kosong (simbol $V(G)$) dan himpunan garis-garis (simbol $E(G)$). Definisi graf menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial. Gambar 2.1 merupakan contoh dari suatu graf.

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Graf

Berdasarkan Gambar 2.1 di atas graf $G = (V, E)$ memiliki:

$V = \{A,\ B, C, D, E\}$

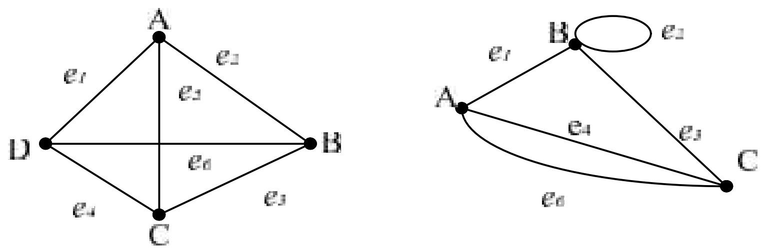
$E = \{\{A,B\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \{D,E\}, \{A,E\}, \{B,E\}, \{B,D\}\}$

$\quad = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}.$

2.1.1 Jenis-Jenis Graf

Graf dapat diklasifikasikan menjadi beberapa faktor dan jenis yaitu diantaranya sebagai berikut (Munir, 2005) :

1. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis, yaitu:
   a. Graf sederhana yaitu graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda.
   b. Graf tak sederhana yaitu graf yang mengandung sisi ganda atau gelang.



(a) (b)

Gambar 2.2 (a) Graf Sederhana (b) Graf Tak-Sederhana

2. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis :
   a. Graf tak-berarah (*undirected graph*) yaitu graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
   b. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*) yaitu graf yang setiap sisisnya diberikan orientasi arah atau biasanya disebut dengan busur (*arch*).

2.1.2 Terminologi Graf

Terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf, di bawah ini didefinisikan beberapa terminologi yang sering dipakai sebagai berikut:

1. Bertetangga (*Adjacent*)

Definisi 2.2 (Munir, 2005) Dua buah simpul pada graf tak-berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G.

Contoh 2.2

Pada Gambar 2.2 (a), simpul A bertetangga dengan simpul B dan D, tetapi simpul A tidak bertetangga dengan simpul C.

2. Bersisian (*Incident*)

Definisi 2.3 (Munir, 2005) Untuk sembarang sisi $e = (u, v)$ sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v.

Contoh 2.3

Pada Gambar 2.2 (a), sisi e_1 bersisian dengan simpul A dan simpul D, sisi e_2 bersisian dengan dengan simpul A dan simpul B, sisi e_3 bersisian dengan simpul B dan simpul C, sisi e_4 bersisian dengan simpul C dan simpul D.

3. Derajat (*degree*)

Definisi 2.4 (Siang, 2006) Misalkan v adalah titik dalam suatu graf G. Derajat titik v (simbol $d(v)$) adalah jumlah garis yang berhubungan dengan titik v dan garis suatu loop dihitung dua kali. Derajat total G adalah jumlah derajat semua titik dalam G.

Contoh 2.4

Tentukan derajat untuk masing-masing simpul pada gambar 2.2(a), serta tentukan derajat totalnya.

$d(v_A) = 3$ karena garis yang berhubungan dengan v_A adalah e_1, e_2, dan e_5.

$d(v_B) = 3$ karena garis yang berhubungan dengan v_B adalah e_2, e_6, dan e_3.

$d(v_C) = 3$ karena garis yang berhubungan dengan v_C adalah e_3, e_5, dan e_4.

$d(v_D) = 3$ karena garis yang berhubungan dengan v_D adalah e_4, e_5, dan e_1.

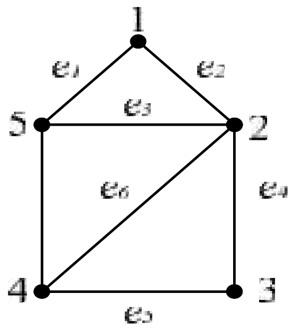
Sehingga,

Derajat total = $\sum_{i=A}^{D} d(v_i)$ = 3 + 3+ 3+ 3 = 12

4. Lintasan (*path*)

Definisi 2.5 (Baugh, 2002) Misalkan v_0 dan v_n adalah vertek-vertek dalam sebuah graf. Sebuah lintasan dari v_0 ke v_n dengan panjang n adalah sebuah barisan berselang seling dari $n+1$ vertek dan n sisi yang berawal dengan vertek v_0 dan berakhir dengan vertek v_n. $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots v_{n-1}, e_n)$ dengan sisi e_1 incident pada vertek v_{i-1} dan v_i dengan $i = 1,2,..,n$.

Contoh 2.5



Gambar 2.3 Graf Sederhana

Berdasarkan Gambar 2.3 salah satu lintasan dari graf di atas yaitu lintasan 1, 2, 3, 4 dengan barisan sisi $e_2, e_{4,}\ e_5$.

5. Siklus (*Cycle*) atau sirkuit (*Circuit*)

Definisi 2.6 (Munir, 2005) Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau siklus.

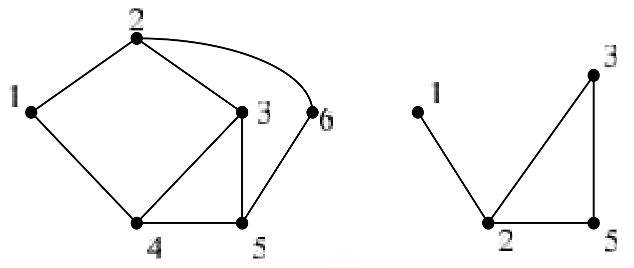
Contoh 2.6

Pada Gambar 2.3, dimulai dari simpul 1, 2, 5, 1 adalah sebuah sirkuit. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi di dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1,2,5,1 pada Gambar 2.3 memiliki panjang 3.

6. Upgraf (*Subgraph*).

Definisi 2.7 (Munir, 2005) Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ upgraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Contoh 2.7



(a) (b)

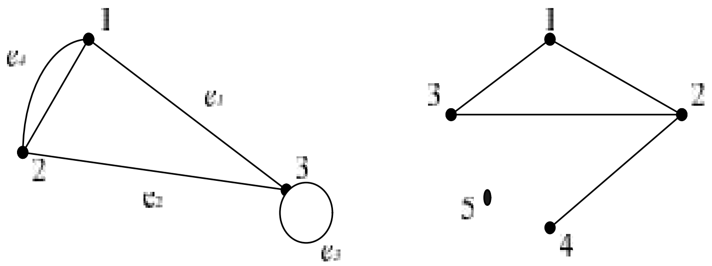
Gambar 2.4 (a) Graf G_1 (b) Sebuah Upgraf dari G_1

7. Graf Terhubung (*Connected Graph*)

Definisi 2.8 (Siang, 2006) Dua simpul v dan w dalam G dikatakan terhubung jika dan hanya jika ada lintasan dari v ke w atau graf G dikatakan terhubung jika dan hanya jika setiap dua simpul dalam G terhubung.

Gambar di bawah ini adalah suatu contoh graf terhubung dan tidak terhubung.

Contoh 2.8



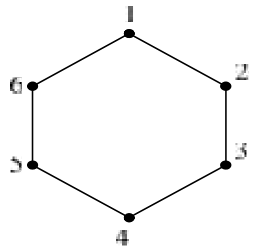
(a) (b)

Gambar 2.5 (a) Graf Terhubung (b) Graf Tidak Terhubung

8. Graf Lingkaran

Definisi 2.9 (Munir, 2005) Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n. Jika simpul-simpul pada C_n adalah $v_1, v_2, \ldots, v_n,$ maka sisinya adalah $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, v_{n-1}, v_n,$ dan (v_n, v_1) dengan kata lain, ada sisi dari simpul terakhir v_n ke simpul pertama v_1. Contoh dari graf lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.6 di bawah ini.

Contoh 2.9



Gambar 2.6 Graf Lingkaran

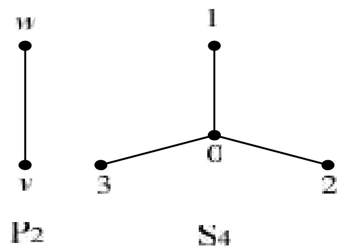
2.2 Graf Hasil Kali Kartesius

Definisi 2.10 (Fahcruddin, 2008) Hasil kali kartesius dari G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 \sim v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 \sim v_1 \in E(G_1)$.

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G maka u dan v terhubung langsung (*adjancent*). Selanjutnya jika sisi e menghubungkan titik u dan v, maka dapat ditulis $u \sim v$, dibaca titik u terhubung langsung dengan v. Tanda ’’~’’ menyatakan terdapat sisi yang menghubungkan antara dua titik dalam suatu graf.

Berikut ini adalah contoh graf hasil kali kartesius.

Contoh 2.10



Gambar 2.7 Graf Sederhana

Berdasarkan definisi 2.10 maka:

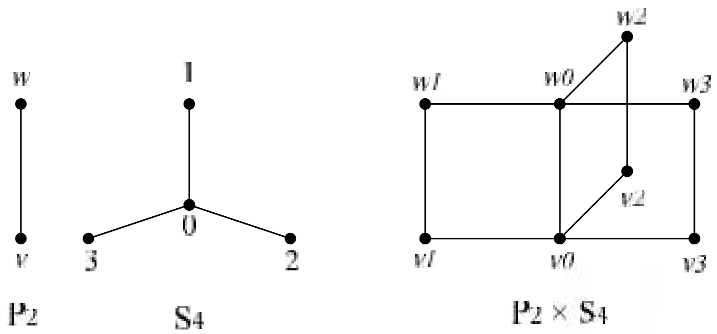
Diketahui bahwa $V(P_2) = \{w, v\}$ dan $V(S_4) = \{1, 0, 2, 3\}$

$$V(P_2 \times S_4) = (w, v) \times (0, 1, 2, 3)$$
$$= \{(w,1), (w,0), (w,2), (w,3), (v,0), (v,1), (v,2), (v,3)\}$$

$$E(P_2 \times S_4) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}.$$

$$e_1 = (w,1) \sim (v,1)$$
$$e_2 = (w,0) \sim (v,0)$$
$$e_3 = (w,2) \sim (v,2)$$
$$e_4 = (w,3) \sim (v,3)$$
$$e_5 = (v,1) \sim (v,0)$$
$$e_6 = (w,1) \sim (w,0)$$
$$e_7 = (w,0) \sim (w,2)$$
$$e_8 = (v,0) \sim (v,2)$$
$$e_9 = (v,0) \sim (v,3)$$
$$e_{10} = (w,0) \sim (w,3)$$

Hasil kali kartesius graf $P_2 \times S_4$ pada Gambar 2.7 diperoleh delapan titik dan sembilan sisi, dapat dilihat pada Gambar 2.8 berikut ini:



Gambar 2.8 Graf Hasil Kali Kartesisus $P_2 \times S_4$

2.3 Fungsi

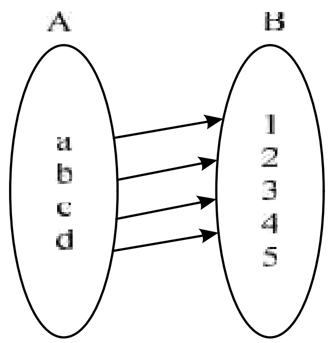
Definisi 2.11 (Munir, 2005) Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap element di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan $f : A \to B$ yang artinya f memetakan A ke B.

Secara umum fungsi dapat digolongkan menjadi tiga bagian yaitu:

a. Fungsi satu-satu (*injektif*)

Fungsi f dikatakan satu-satu (*injektif*) jika tidak ada dua element himpunan A yang memiliki bayangan yang sama. Dengan kata lain jika a atau b adalah anggota himpunan A, maka $f(a) \neq f(b)$ bilamana $a \neq b$. Jika $f(a) = f(b)$ maka implikasinya $a = b$.

Gambar 2.9 Berikut ini mengilustrasikan fungsi satu-satu (*injektif*).

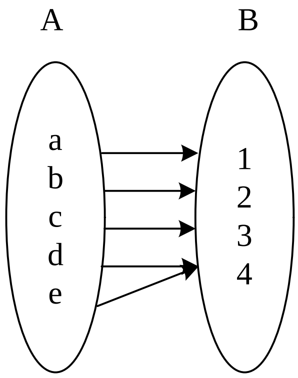


Gambar 2.9 Pemetaan Injektif

b. Fungsi pada (*surjektif*)

Fungsi f dikatakan pada (*surjektif*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A. Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpuna B.

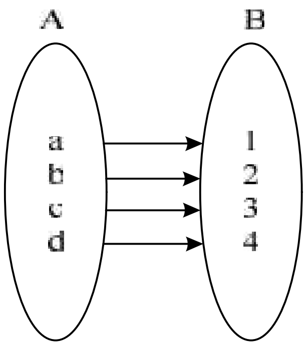
Gambar 2.10 Berikut ini mengilustrasikan fungsi pada (*surjektif*).



Gambar 2.10 Pemetaan Surjektif

c. Fungsi korespondensi satu-satu (*bijektif*)

Fungsi korespondensi satu-satu (*bijektif*) jika ia memenuhi fungsi *injektif* dan fungsi *surjektif*. Istilah ini berasal dari kenyataan bahwa setiap elemen domain akan berkorespondensi secara unik ke elemen kodomain dan sebaliknya. Gambar 2.11 Berikut ini mengilustrasikan fungsi bijektif.



Gambar 2.11 Pemetaan Bijektif

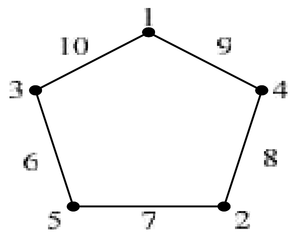
2.4 Pelabelan Total Sisi Ajaib

Definisi 2.12 (Wijaya, 2000) Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan komponen sisi E. Banyak titik di G adalah p, banyak sisi di G adalah q dan h merupakan banyak titik dan sisi pada graf G atau $p + q$. Pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif f dari $V \cup E$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots h\}$ sehingga untuk sembarang sisi (xy) di G berlaku:

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k,$$

untuk suatu kostannta k. Selanjutnya k disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut graf total sisi ajaib. Berikut ini ada salah satu contoh pelabelan total sisi ajaib pada graf C_5 yang mempunyai konstanta tetap $k = 14$.

Contoh 2.8



Gambar 2.12 Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf C_5

Menurut Wijaya, (2000) pelabelan total sisi ajaib pada graf hasil kali kartesius mempunyai suatu persyaratan dasar, yaitu misal graf G mempunyai v titik dan e sisi, maka titik v_i di G mempunyai derajat d_i, dan mendapat label x_i. Jika k adalah angka ajaib dari suatu pelabelan total sisi ajaib pada graf G maka berlaku:

$$ke = \binom{v+e+1}{2} + \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)x_i. \qquad (2.1)$$

Setiap pelabelan total sisi ajaib f pada suatu graf G selalu terdapat pelabelan dualnya, untuk menentukan pelabelan dual pada graf hasil kali kartesius $P_m \times P_2$ dengan m ganjil dapat dilakukan berdasarkan ketentuaan di bawah ini:

$f'(x) \quad = v + e + 1 - f(x),$ untuk setiap titik x, dan

$f'(\{x, y\}) = v + e + 1 - f(\{x, y\}),$ untuk setiap sisi $\{x, y\}$.

Jika f mempunyai angka ajaib k, maka f' mempunyai angka ajaib,

$$k' = 3(v + e + 1) - k. \qquad (2.2)$$

Pelabelan total sisi ajaib pada graf hasil kali kartesius dari graf $P_m \times P_2$ dengan m ganjil, hal pertama yang dilakukan adalah membentuk himpunan titik dari graf $P_m \times P_2$ sebagai berikut:

$V = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Selanjutnya, $\{a_j, a_{j+1}\}$ dan $\{b_j, b_{j+1}\}$ merupakan sisinya untuk setiap $j = 1, 2, \dots, m-1$ dan $\{a_j, b_j\}$ juga merupakan sisi untuk setiap $j = 1, 2, \dots, m$.

Teorema 2.1 (Wallis, 2000) Jika G graf terhubung dengan v titik dan e sisi, sedemikian sehingga setiap titik mempunyai derajat ganjil dan $v + e \equiv 2 (\text{mod } 4)$, maka G bukan total sisi ajaib.

Teorema 2.2 (Wijaya, 2000) Jika m ganjil, maka graf $P_m \times P_2$ adalah total sisi ajaib dengan angka ajaib $k = \frac{1}{2}(11m + 1)$.

Bukti :

Beri label semua titik dari graf $P_m \times P_2$ sebagai berikut:

$$f(a_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(j+1) & \text{, untuk } j = 1,3,\dots,m \\ \frac{1}{2}(m+j+1) & \text{, untuk } j = 2,4,\dots m-1 \end{cases}$$

$$f(b_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3m+j) & \text{, untuk } j = 1,3,\dots,m \\ \frac{1}{2}(2m+j) & \text{, untuk } j = 2,4,\dots,m-1 \end{cases}$$

dan beri label semua sisinya menurut ketentuan di bawah ini:

$$f(\{a_j, a_{j+1}\}) = 5m - 1 - j \quad \text{, untuk } j = 1,2,\dots,m$$

$$f(\{b_j, b_{j+1}\}) = 3m - j \quad \text{, untuk } j = 1,2,..m$$

$$f(\{a_j, b_j\}) = 4m - j \quad \text{, untuk } j = 1,2,\dots,m$$

Maka pelabelan f pada graf $P_m \times P_2$ memenuhi:

$$\begin{aligned} f(a_j) + f(\{a_j, a_{j+1}\}) + f(a_{j+1}) &= f(b_j) + f(\{b_j, b_{j+1}\}) + f(b_{j+1}) \\ &= f(a_j) + f(\{a_j, b_j\}) + f(b_j) \\ &= \frac{1}{2}(11m + 1) \quad \text{untuk setiap } j \end{aligned}$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan cara mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan diteliti.

Langkah-langkah yang akan digunakan dalam penyelesaian tugas akhir ini sebagai berikut:

1. Memahami terminologi graf.
2. Memahami tentang pelabelan total sisi ajaib pada graf lintasan.
3. Membentuk himpunan semua titik dari graf $P_m \times P_2$.
4. Membentuk himpunan semua sisi dari graf $P_m \times P_2$.
5. Membentuk graf hasil kali kartesius dari graf $P_m \times P_2$.
6. Menentukan nilai konstata ajaib k.
7. Memberikan label pada semua titik dari graf $P_m \times P_2$.
8. Memberikan label pada semua sisi dari graf $P_m \times P_2$.
9. Mendapatkan graf hasil kali kartesius yang sudah diberikan label.

Langkah- langkah metode penelitian dalam *flowchart* berikut ini:

Gambar 3.1 ***Flowchart*** **Metodologi Penelitian**

DAFTAR PUSTAKA

Baskoro, E.T & cholily, Y.M. "*Expanding Super EdgeMagic Graph*". PROC. ITB Sains & Tek. Vol. 36, no. 2. 2004.

Baugh, Richard Johnson."*Matematika Diskrit*", Edisi kedua. Prenhaullindo, Jakarta. 2002.

Cunningham, Daysi."*Vertec – Magic*", Electric Journal of Undergraduate Mathematic, Volume 9, 1-20, 2004.

Fahcruddin, Imam."Spectrum Graf Hasil Kali Kartesius". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Maulana Malik Ibrahim Malang*. Malang. 2008.

Fitria, Lala. ''Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Bintang K_{1},n (n Bilangan Asli)". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Malang*. 2007.

Munir, Rinaldi. "*Matematika Diskrit*", Edisi Ketiga. Informatika, Bandung, Indonesia. 2005.

Siang, Jong Jek. "*Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*". Penerbit Andi, Yogyakarta. 2006.

Wallis, Baskoro, Miller & Slania. "*Edge-Magic Total Labelings*". Australian J. Combin, 22. 2000.

Wijaya, Baskoro. "*Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Hasil Kali Dua Graf*". ITB Bandung. 2000